

# 基于相位干涉仪阵列二次相位差的波达角估计算法研究

龚享钰<sup>1</sup>, 皇甫堪<sup>1</sup>, 袁俊泉<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073; 2. 空军雷达学院, 湖北武汉 430010)

**摘要:** 本文针对利用相位干涉仪估计波达角过程中的相位模糊的问题, 提出了一种利用相位干涉仪阵列的相位差之差(二次相位差)得到长基线干涉仪的无模糊相位差并进行波达角估计的方法, 并且分析了这种方法得到正确波达角估计值的条件. 仿真试验验证了上述结论.

**关键词:** 相位干涉仪; 波达角估计; 二次相位差

**中图分类号:** TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 03-0444-03

## A New Algorithm for Estimation of Direction of Arrival Based on the Second-Order Difference of Phase of Interferometer Array

GONG Xiang-yi<sup>1</sup>, HUANGFU Kan<sup>1</sup>, YUAN Jun-quan<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Science and Engineer, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;

2. Airforce Radar Academy, Wuhan, Hubei 430010, China)

**Abstract:** In the background of phase ambiguity via using phase interferometer to estimate the direction of arrival, a new method is proposed for estimation direction of arrival by using the second-order of the phase of interferometer array. The possibility of correction is analysed. The conclusion is supported by simulation results.

**Key words:** phase interferometer; estimation direction of arrival; second-order difference of phase

### 1 引言

相位干涉仪被广泛应用于波达角的估计领域<sup>[1-3]</sup>,它具有精度高、结构简单、原理清晰、观测频带宽的优点. 相位干涉仪由两个接收阵元、两个接收机和一个比相器构成, 两个阵元接收到信号的相位差与波达角、阵元间距(基线长度) $D$ 、信号波长 $\lambda$ 的关系为: $\Delta\phi = 2D\sin\theta/\lambda + \nu$ , 其中 $\nu$ 为相位差的观测噪声, 不妨假设其均值为0的高斯白噪声. 通过测量相位差可以得到信号的波达角估计值 $\hat{\theta} = \arcsin(\Delta\phi/(2D))$ , 通常采用增加阵元间距 $D$ 的方法提高波达角的估计精度, 一般 $D \gg \lambda/2$ , 使得 $|\Delta\phi| \gg \pi$ , 由于相位干涉仪输出 $\phi$ 的范围是 $[-\pi, \pi]$ , 所以它是一个以 $2\pi$ 为模糊的观测值, 即: $\phi = \theta + 2M\pi$ , 其中 $M$ 为未知的模糊数. 为了对 $\phi$ 进行解模糊处理, 增加一个短基线( $D < \lambda/2$ )的相位干涉仪, 通过它得到一个不模糊的估计值(其精度远不如长基线相位干涉仪对 $\theta$ 的估计精度), 并对测量得到的长基线相位干涉仪的相位差 $\phi$ 进行解模糊处理, 最终得到高精度的估计值<sup>[3]</sup>. 这种方法有两个局限性. 第一<sup>[4]</sup>, 对于宽带的接收阵元, 如接收范围为2GHz~8GHz, 最低的接收频率决定了阵元的物理尺寸, 而最高的接收频率决定了短基线干涉仪的基线长度, 使得在半波长的范围内无法安装两个接收阵元; 第二, 由于短

基线相位干涉仪对波达角 $\theta$ 的估计精度有限, 在利用它对长基线干涉仪的 $\phi$ 进行解模糊处理时可能得到错误的模糊数, 导致波达角估计的误差太大. 在文献[5]中提出了一种基于参差距离的相位差解模糊算法, 在两个干涉仪的基线长度比满足参差关系的条件下(它们的基线长度都可以大于 $\lambda/2$ ), 可以利用这种参差关系对相位干涉仪的观测相位差进行解模糊处理, 从而完成对波达角的估计. 同理, 对于多个(三个以上)阵元的情况, 只要它们的距离比满足参差关系, 采用多维的整数搜索可以对观测相位差进行解模糊处理. 文献[6]进一步提出了一种多组解模糊波达角估计算法. 以上算法都是利用不同相位干涉仪不同的基线长度的比值特性对相位差进行解模糊处理. 由于相位干涉仪的基线长度与相位差的线性关系, 使得在同一条直线上的不同相位干涉仪的基线长度差也和它们的二次相位差成线性关系, 即在各个相位干涉仪基线长度都大于的情况下存在基线长度差小于的 $\lambda/2$ 的可能性, 从而可以得到不模糊的二次相位差. 本文在这种思路下提出了一种基于相位干涉仪阵列二次相位差的波达角估计算法. 这种算法相对于文献[4~6]的算法具有两个优点. 第一, 由于可以测量得到无模糊的二次相位差, 算法的整个过程中不需要进行多维整数搜索计算, 计算量小, 并且算法简单; 第二, 因为采取了逐步增加基线长度差的方案, 所以在相同的噪声干扰的

情况下可以得到更高的正确解模糊概率。

## 2 相位干涉仪阵列二次相位差的波达角估计算法

### 2.1 相位干涉仪阵列与多维整数搜索解模糊方法

如图 1 所示,考虑在同一条直线上分布有  $2N$  个阵元的相位干涉仪阵列,以第 0 个阵元为基准,构成了  $2N-1$  个相位干涉仪,它们的基线长度分别为  $D_1, D_2, \dots, D_{2N-1}$ ,基线长度比值  $D_1 : D_2 : \dots : D_{2N-1} = P_1 : P_2 : \dots : P_{2N-1}$ ,其中  $P_n$  分别为正整数,要求阵元的分布满足  $P_1 < P_2 < \dots < P_{2N-1}$ 。在考虑辐射源处于远场位置,接收信号的波长为  $\lambda$ ,波达角为  $\theta$  的情况下,各个相位干涉仪的相位差为信号到达的相位差和观测噪声之和:

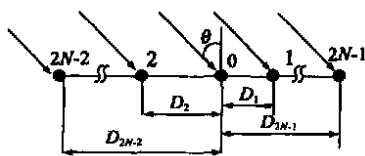


图 1 相位干涉仪阵列的几何示意图

$$\phi_n = D_n \sin \theta / \lambda + v_n, n = 1, 2, \dots, 2N - 1 \quad (1)$$
与两个阵元的相位干涉仪情况相同,实际观测得到的相位差  $\hat{\phi}_n$  是以  $2$  为模糊的观测值:

$$\hat{\phi}_n = \phi_n \bmod(2) \quad \phi_n = \hat{\phi}_n + 2 M_n, n = 1, 2, \dots, 2N - 1 \quad (2)$$

其中  $M_n$  为第  $n$  个相位干涉仪的观测相位差的模糊数。在满足  $\text{GCD}(P_1, P_2, \dots, P_{2N-1}) = 1$  的情况下, ( $\text{GCD}(\cdot)$  为最大公因子),如果不考虑观测噪声  $v_n$ ,由式(2)构成的方程组是一个同余方程组,可以通过余数定理求得各个模糊数,因为观测噪声的存在,对模糊数  $M_n$  的求解比较复杂<sup>[7]</sup>。直观而言,可以在最小均方误差的准则对式(2)构成的方程组进行  $2N-1$  维的整数搜索计算求得各个模糊数,具体的计算公式为

$$[M_1, M_2, \dots, M_{2N-1}] = \arg \min_{M_1, M_2, \dots, M_{2N-1}} \sum_{n=1}^{2N-1} \left( \frac{\hat{\phi}_n + 2 M_n}{P_n} - a \right)^2 \quad (3)$$

其中  $a = \frac{1}{2N-1} \sum_{n=1}^{2N-1} \left( \frac{\hat{\phi}_n + 2 M_n}{P_n} \right)$ 。当  $N$  较大时(如  $N > 4$ ),即使是整数搜索的计算量也十分大。

### 2.2 利用二次相位差的波达角估计算法

由于多维整数搜索的计算量较大,所以有必要寻找一种计算量小并且简单的波达角估计算法。利用相位干涉仪进行波达角估计的关键问题是对观测得到的相位差进行解模糊处理,文献[3~6]中介绍的各种算法都是利用各个相位干涉仪的基线长度信息对观测得到的相位差进行解模糊处理,有的还需要进行整数搜索计算,具有一定的局限性。从另一个方面看,第  $n_1$  个和第  $n_2$  相位干涉仪的二次相位差

$$\hat{\phi}_{n_1} - \hat{\phi}_{n_2} = 2 D \sin \theta / \lambda + v_{n_1} - v_{n_2} \quad (4)$$

其中  $D$  为两个相位干涉仪的基线长度差,  $D = D_{n_1} - D_{n_2}$ 。式(4)同样可以认为是一个基线长度为  $D$  的相位干涉仪,只不过并不在实际中真实存在,而是通过两个相位干涉仪的二次相位差体现出来。由于各个相位干涉仪观测得到包含模糊的相位差  $\hat{\phi}_n$ ,所以观测得到的二次相位差  $\hat{\phi}_n$  也包含了模糊,  $\hat{\phi}_n = \phi_n \bmod(2)$ 、 $\phi_n = \hat{\phi}_n + 2 M_n$ ,此处  $M_n$  为二次相位差的模糊数。从式(4)可以看出,如果合理地放置相位干涉

仪阵列的阵元位置,使得其中某两个干涉仪的基线长度小于或等于  $\lambda/2$ ,就可以得到不模糊的二次相位差,进而对其他含有模糊的二次相位差(或相位差)进行解模糊处理,得到波达角估计值。

从上面的讨论可以知道,相位干涉仪阵列的阵元分布是二次相位差波达角估计算法的一个关键。如图 1 所示,以第 0 个阵元为基准,其他的  $2N-1$  个阵元与之构成  $2N-1$  个相位干涉仪,奇数序号的阵元分布在右边,偶数序号的阵元分布在左边,并且阵元分布的位置要满足以下要求:

- (1) 为了使得第一个二次相位差不含有模糊,要求  $D_1 = D_2 - D_1 / 2$ 。
- (2) 相邻的两个基线长度差之间满足一定的比例关系,  $D_n / D_{n+1} = 1/k_n, n = 1, 2, \dots, 2N-2$ ,其中  $k_n$  为大于 1 的数,为了以后分析的方便,假设  $k_n = k, n = 1, 2, \dots, 2N-2, k$  为一个固定的大于 1 的正整数。
- (3) 最大的基线长度差  $D_{2N-2}$  和最长的基线长度  $D_{2N-1}$  之间的关系:  $D_{2N-2} / D_{2N-1} = 1/k_{2N-1}$ ,为了分析方便,假设  $k_{2N-1} = k$ 。

- (4) 在相位差的观测噪声方差为  $\sigma_v^2$  的情况下,为了得到精度为  $\lambda/2$  的波达角估计值,要求最长的基线长度  $D_{2N-1} > \lambda/\sqrt{2}$ 。

综上所述,整个相位干涉仪阵列的阵元的数目至少为  $\lceil \log_k(\lambda/\sqrt{2}) \rceil + 2$ ,其中  $\lceil \cdot \rceil$  为上取整。如果增加基线差的比值  $k$  可以降低所要求的阵元数,但是可能降低算法的正确概率(第三节将对此讨论)。二次相差的波达角估计算法步骤为:

- (1) 令  $n = 1, \phi_1 = (\hat{\phi}_1 - \phi_1) \bmod(2), D_n = D_{n+1} - D_n$ 。
- (2) 令  $n = n + 1$ ,记  $D_{n+1} = D_{n+2} - D_{n+1}, \phi_{n+1} = (\hat{\phi}_{n+1} - \phi_{n+1}) \bmod(2)$ ,根据  $D_n / D_{n+1} = 1/k$ ,利用前一次得到的无模糊二次相位差  $\phi_n$  对  $\phi_{n+1}$  进行解模糊处理得到无模糊的  $\phi_{n+1}$ 。
- (3) 重复第二步,直到  $n = 2N-3$ ,得到最大的不包含模糊的二次相位差  $\phi_{2N-2}$ ,并根据  $D_{2N-2} / D_{2N-1} = 1/k$  得到最长基线干涉仪无模糊相位差  $\phi_{2N-1}$ 。
- (4) 利用  $\phi_{2N-1}$  计算波达角的估计值  $\hat{\theta} = \arcsin(\phi_{2N-1} / (2 D_{2N-1}))$ 。

整个算法的关键在于第二步对逐步增大的二次相位差进行的解模糊处理。在不考虑噪声干扰的情况下,由于相邻两个基线差之间存在  $D_n / D_{n+1} = 1/k$  的关系,所以在已知无模糊  $\phi_n$  的情况下,利用式(3)中二次相位差和基线长度差的线性关系(假设其中的噪声不存在)得到

$$\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{D_{n+1} + 2 M_{n+1}} = \frac{1}{k}, n = 1, 2, \dots, 2N-3 \quad (5)$$

其中  $M_{n+1}$  为待求得模糊数,可以对式(5)是直接求解得到  $M_{n+1}$ ,从而得到第  $n+1$  个二次相位差  $\phi_{n+1}$ 。若考虑噪声干扰的情况下,对  $M_{n+1}$  的求解公式为

$$M_{n+1} = \text{round}((k \phi_{n+1} - \phi_n) / 2) \quad (6)$$

其中  $\text{round}(x)$  为离变量  $x$  最近的整数。

## 3 正确解模糊条件分析

在整个算法中,第二步逐个对各个相位干涉仪之间的二

次相位差进行解模糊处理的正确性和第三步对最长基线的相位差  $\phi_{2N-1}$  进行解模糊处理是影响整个算法的正确性的关键. 由于噪声干扰的存在, 使得利用式(6)得到的模糊数可能不等于实际的模糊数, 导致相位差或者二次相位差的计算错误, 最终导致波达角估计错误. 首先分析式(6)正确解模糊的条件, 根据假设  $\phi_n = \phi'_n + v_{n+1} - v_n$ , 其中  $\phi'_n$  为无噪声的二次相位差,  $\phi_{n+1} = \phi'_{n+1} + M'_{n+1} + v_{n+2} - v_{n+1}$ , 其中  $\phi'_{n+1}$  为无噪声的包含模糊的二次相位差,  $M'_{n+1}$  为真实的模糊数, 将它们代入式(6), 并根据  $k \phi'_n = \phi'_{n+1} + 2 M'_{n+1}$  整理得到

$$M_{n+1} = \text{round} \left( M'_{n+1} - \frac{k v_n - (k+1) v_{n+1} + v_{n+2}}{2} \right) \quad (7)$$

从上式可以看出: 只有  $|k v_n - (k+1) v_{n+1} + v_{n+2}| < 2$ ,  $n = 1, 2, \dots, 2N-3$  的情况下, 由式(6)计算得到的模糊数才等于真正的模糊数  $M'_{n+1}$ , 这就是二次相位差正确解模糊的条件. 根据同样的道理, 可以得到算法第三步对  $\phi_{2N-1}$  正确解模糊的条件是  $|k v_{2N-2} - (k+1) v_{2N-1}| < 2$ . 整个算法的正确条件由第二步对二次相位差和第三步对  $\phi_{2N-1}$  解模糊处理的条件构成

$$\begin{aligned} |k v_n - (k+1) v_{n+1} + v_{n+2}| < 2, n = 1, 2, \dots, 2N-3 \\ |k v_{2N-2} - (k+1) v_{2N-1}| < 2 \end{aligned} \quad (8)$$

从上式可以看出, 在保证正确解模糊的条件下, 如果增加基线长度差的比值  $k$ , 要求噪声干扰越小, 否则将影响算法的正确性.

### 4 仿真试验

在仿真试验中假设各个基线长度差之间的比值  $k = 3$ , 最长基线长度为  $81/2$ , 如图 1 所示. 假设相位干涉仪阵列的各个阵元以第 0 个阵元为基准, 线性分布在  $X$  方向, 它们的位置为  $(0, 41/2, -42/2, 45/2, -54/2, 81/2)$ , 基线长度差分别为  $2, 3, 2, 9, 2, 27, 2$ . 首先验证式(8)的正确性, 假设各个相位干涉仪的观测噪声均匀分布在  $[-q, q]$  的范围内, 其中  $q$  为一个真实数, 从式(8)可以看出只有当  $q < 18$  时, 算法才能够完全正确的进行解模糊处理, 否则就有可能出现错误的结果. 在仿真试验选取  $q$  在  $[0, 3/8]$  的范围内变化,

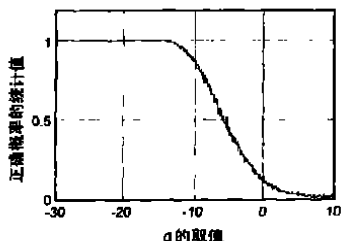


图 2 正确解模糊条件的验证仿真试验

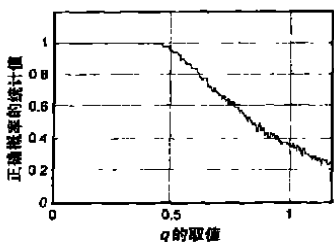


图 3 噪声方差与正确概率的统计关系

目标处于  $\theta = 4$  的位置, 进行 1000 次的 Monte-Carlo 试验, 可以得到正确解模糊的统计概率和  $q$  的关系, 如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 统计曲线在  $q = 18$  处是一个转折点, 当  $q < 18$  时, 得到正确结果的统计概率为 1, 当  $q > 18$  时, 会出现错误的估计结果, 并且随着  $q$  的增大, 正确概率随之减小.

然后讨论相位干涉仪阵列的各个相位差的噪声干扰为高斯白噪声的情况下, 噪声方差与得

到正确估计结果的统计关系. 在其他条件与图 2 的仿真试验相同的情况下, 假设各个相位干涉仪的观测噪声服从相同的分布, 并且相互独立, 它们的方差为  $\sigma_v^2$ ,  $\sigma_v^2$  在  $[-30\text{dB}, 10\text{dB}]$  的范围内变化, 对于每一种情况进行 1000 次的 Monte-Carlo 试验, 可以得到正确解模糊的统计概率和  $\sigma_v^2$  的关系, 如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 随着观测噪声方差的减小, 得到正确波达角估计的概率随之增大, 当  $\sigma_v^2 < -13\text{dB}$  (相当于相位差的测量精度为  $0.2\text{rad}$ ) 时, 正确概率已经相当高了, 一般的相位干涉仪能够满足上述的技术要求.

### 5 结论

本文通过对相位干涉仪阵列观测得到的含有模糊的相位差的问题, 提出了一种利用二次相位差逐步解模糊, 从而得到波达角  $\theta$  的估计值的算法, 并且分析了正确解模糊的条件. 这种算法具有计算量小和在噪声干扰下稳健的优点. 通过仿真试验验证了正确解模糊的条件, 并且对噪声方差与正确概率进行了仿真分析, 表明在一般的相位干涉仪能够满足正确解模糊的技术要求.

### 参考文献:

- [1] Dybdal R B. Monopulse resolution in interferometry[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic System, 1986, 22(1): 177 ~ 183.
- [2] Messer H, Singal G. On the achievable DF accuracy of two kinds of active interferometers[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic System, 1996, 32(3): 1158-1164.
- [3] Kaufman M G. Radio interference phase channel combiner mod II[J]. IEEE Trans on Space Electronics and Telemetry, 1964, 10(1): 116 - 123.
- [4] Sundaram K R, Ranjan K M. Modulo conversion method for estimation the direction of arrival [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic System, 2000, 36(4): 1391 ~ 1396.
- [5] 龚享钦, 袁俊泉, 等. 基于参差距离的相位差变化值的解模糊方法研究[J]. 信号处理, 2003, 19(4): 308 - 311.
- [6] 龚享钦, 袁俊泉, 等. 基于相位干涉仪阵列多组解模糊的波达角估计算法研究[J]. 电子与信息学报.
- [7] William S C, Y James B, Vernon L B. A noise insensitive solution to an ambiguity problem in spectral estimation[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic System, 1989, 25(5): 729 - 732.

### 作者简介:



龚享钦 男, 1973 年 10 月出生于江西省遂川县, 现为国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生, 在国内外发表学术论文 10 余篇, 主要研究方向为现代信号处理和单站无源定位与跟踪. E-mail: gongxiangqi2002@yahoo.com.cn

皇甫堪 男, 1939 年 4 月出生于上海市, 教授, 博士生导师, 主要从事现代信号处理技术方面的研究.

袁俊泉 男, 1976 年 10 月出生于山东省乐陵市, 博士, 现为空军雷达学院教员, 在国内外发表学术论文 20 余篇, 主要研究方向为现代信号处理.